Коновалов Андрей Александрович

Учитель высшей категории Специализированного учебного научного центра при Уральском федеральном университете имени первого Президента России Б.Н. Ельцина (СУНЦ УрФУ). Шестикратный победитель Всероссийского конкурса учителей физики и математики фонда «Династия» 2007, 2008, 2009, 2010, 2011 и 2012 годов. Эксперт ЕГЭ. Член жюри областной олимпиады.

Геометрические идеи при решении баллистических задач

На данный момент существуют два способа решения задач по кинематике на движение тела, брошенного под углом к горизонту: метод координат и векторный метод. В данной работе будет рассмотрено развитие векторного метода на примерах решения большого спектра задач различной степени сложности. Для начала будут рассмотрены вспомогательные понятия, формулы и теоремы из геометрии, затем, собственно, сами задачи и в заключение – значимость метода.

Немного об известном

Под вектором средней скорости $\left\langle \vec{v} \right\rangle$ будем подразумевать отношение перемещения $\vec{S}$, совершённого за время t, к этому интервалу времени: $\left\langle \vec{v} \right\rangle = \dfrac{\vec{S}}{t}$.

При равноускоренном движении выполняется векторное равенство между вектором перемещения $\vec{S}$, начальной скоростью $\vec{v}_0$, постоянным ускорением $\vec{g}$ и временем t, за которое данное перемещение было совершено:

$$\vec{S} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}$$

(рис. 1). Разделим данное уравнение на t и сравним с векторным равенством, выражающим конечную скорость через начальную скорость, ускорение и время, за которое это изменение скорости произошло:

$$\frac{\vec{S}}{t} = \vec{v}_0 + \frac{\vec{g}t}{2} \quad \text{и} \quad \vec{v}_\text{к} = \vec{v}_0 + \vec{g}t$$

(рис. 2). Следовательно, *средняя скорость в треугольнике скоростей является* <u>*медианой,*</u> *проведённой к* $\vec{g}t$:

$$\left\langle \vec{v} \right\rangle = \frac{\vec{S}}{t} = \frac{\vec{v}_0 + \vec{v}_\text{к}}{2}$$

(рис. 3). Теперь совместим все векторные треугольники и заметим, что когда описывается движение одного тела, то по информативности *диаграмма скоростей ничем не уступает диаграмме перемещений*, а даже, как увидим дальше, её превосходит. В дальнейшем все задачи на движение одного тела мы будем решать, используя только диаграмму скоростей. Давайте теперь о ней детально поговорим.

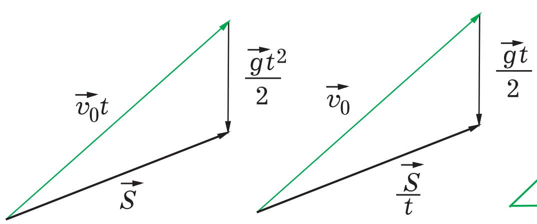


Рис. 1

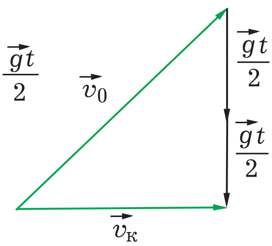


Рис. 2

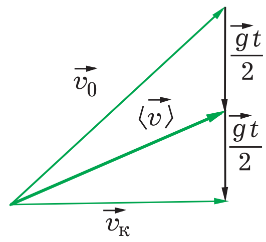
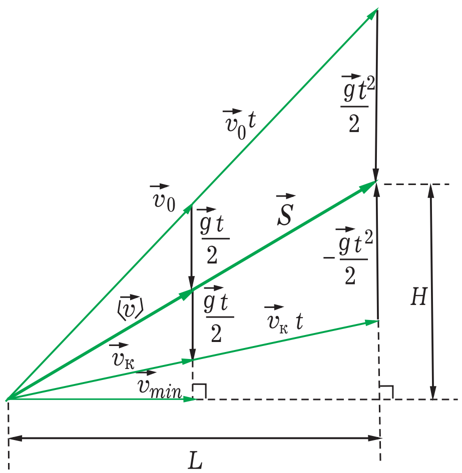
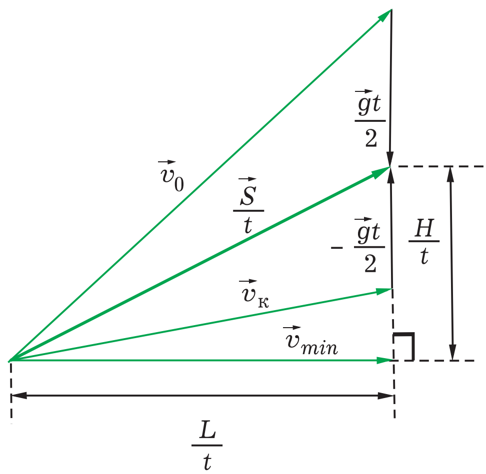


Рис. 3

Несколько замечаний к векторным соотношениям, представленным на диаграмме скоростей





Замечание 1. Минимальная скорость тела $\vec{v}_{min}$ перпендикулярна $\vec{g}$.

Замечание 2. Высота подъёма H в данный момент времени может быть в общем случае величиной отрицательной, тогда H надо отсчитывать от горизонта вдоль $\vec{g}$.

Замечание 3. Из рисунка видно, что наряду с уравнением

$$\frac{\vec{S}}{t} = \vec{v}_0 + \frac{\vec{g}t}{2}$$

можно пользоваться также векторным равенством

$$\frac{\vec{S}}{t} = \vec{v}_к - \frac{\vec{g}t}{2},$$

что порой очень удобно.

Замечание 4. Начальная скорость v_0 и скорость $v_к$ тела на высоте H связаны между собой только этой высотой подъёма H по формуле

$$v_к^2 = v_0^2 - 2gH.$$

Данную формулу следует запомнить! Чтобы её доказать, достаточно рассмотреть два прямоугольных треугольника с общим катетом $\frac{L}{t}$. Тогда, дважды выражая из теоремы Пифагора этот квадрат катета $\left(\frac{L}{t}\right)^2$ и приравнивая друг другу, получим уравнение:

$$v_0^2 - \left(\frac{H}{t} + \frac{gt}{2}\right)^2 = v_к^2 - \left(\frac{H}{t} - \frac{gt}{2}\right)^2,$$

из которого после раскрытия скобок получим искомую формулу.

Замечание 5 (!) Из рисунка видно, что площадь верхнего треугольника скоростей, составленного из начальной скорости $\vec{v}_0$, средней скорости $\langle\vec{v}\rangle$ и вектора $0,5\vec{g}t$, равна

$$S_\Delta = \frac{1}{4}Lg.$$

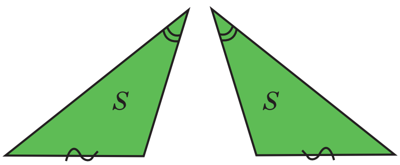
Для нахождения площади треугольника удобно пользоваться следующими тремя формулами:

$$S_\Delta = \frac{1}{2}h_a a = \frac{1}{2}ab\sin\alpha = \frac{1}{2}a^2\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)},$$

где α и β – углы в треугольнике при основании a. Также часто будем использовать формулу приведения $\sin(90^\circ \pm \alpha) = \cos\alpha$. Желательно все эти формулы запомнить для удобства понимания решения задач.

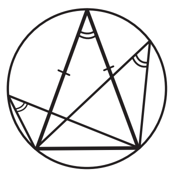
Три замечательные теоремы из математики о площадях

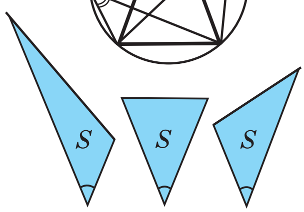
Теорема 1. Если два равновеликих треугольника имеют одинаковый угол и равные противолежащие этим углам стороны, то такие треугольники равны.



Теорема 2. Если задан угол треугольника и противолежащая к этому углу сторона, то максимальная площадь достигается в случае *равнобедренного треугольника*.

Теорема 3. Если заданы площадь и угол треугольника, то минимально возможная противолежащая к этому углу сторона достигается в случае *равнобедренного треугольника*.



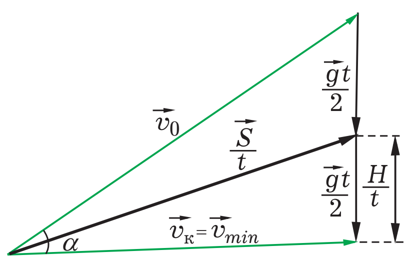


Пятнадцать красиво решённых известных задач

I. *Типичные задачи начального уровня – задачи на определение максимальной высоты подъёма, максимальной дальности и времени полёта для тела, брошенного под углом к горизонту.*

Решение.

1. Нарисуем сначала диаграмму скоростей для случая, когда тело достигло максимальной высоты H.



а) В этот момент времени скорость тела направлена горизонтально, т. е. перпендикулярно $\vec{g}t_{под}$, тогда

$$v_0 \sin\alpha = g t_{\text{под}} \Rightarrow t_{\text{под}} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}.$$

$$б)\ \frac{H}{t_{\text{под}}} = \frac{g t_{\text{под}}}{2} \Rightarrow H = \frac{g t^2_{\text{под}}}{2} =$$

$$= \frac{g}{2}\frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g^2} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

в) $v_к = v_{min} = v_0 \cos\alpha$ подставим в $v_к^2 = v_0^2 - 2gH$ (замечание 4):

$$v_0^2 \cos^2\alpha = v_0^2 - 2gH \Rightarrow H = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

г) Из треугольника скоростей

$$v_0 \sin\alpha = 2\frac{H}{t_{\text{под}}}.$$

С другой стороны:

$$v_0 \sin\alpha = g t_{\text{под}}.$$

Перемножая эти два уравнения, получим

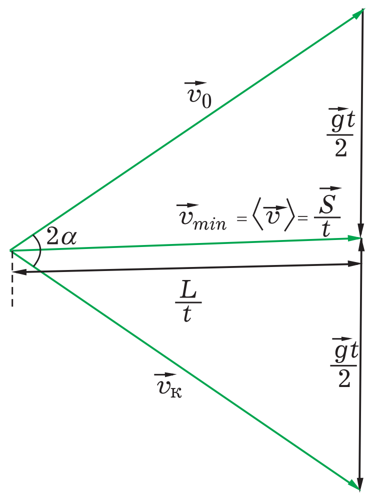
$$H = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

2. На втором рисунке перемещение, а следовательно, и средняя скорость направлены горизонтально, т. е. средняя скорость, которая является медианой в треугольнике скоростей, является также и высотой, а значит треугольник скоростей равнобедренный. Поэтому $v_к = v_0$, угол бросания равен углу приземления, а следовательно, площадь треугольника скоростей, посчитанная как половина произведения сторон на синус угла между ними, равна с одной стороны, $S_\Delta = \frac{1}{2} v_0^2 \sin 2\alpha$, а с другой стороны, по **замечанию 5**, $S_\Delta = \frac{1}{2} Lg$. Отсюда получаем, что дальность полёта

$$L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

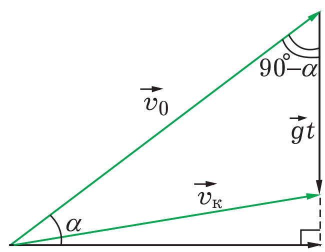
Из треугольника скоростей определим время полёта $t_{\text{пол}}$:

$$v_0 \sin\alpha = \frac{g t_{\text{пол}}}{2} \Rightarrow t_{\text{пол}} = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g} = 2 t_{\text{под}}.$$



II. *Типичная задача среднего уровня – задача с промежуточной точкой. Начальная скорость камня, брошенного под некоторым углом к горизонту, равна v_0, а спустя время t его скорость составляет скорость $v_к$. На какую максимальную высоту H_{max} поднимется этот камень?*

Решение. Нарисуем треугольник скоростей для времени t.



Применим для данного треугольника теорему косинусов:

$$v_к^2 = v_0^2 + g^2 t^2 - 2 v_0 g t \cos(90^\circ - \alpha).$$

Так как $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$, то

$$\sin\alpha = \frac{v_0^2 + g^2 t^2 - v_к^2}{2 v_0 g t}.$$

Подставляя синус в формулу максимальной высоты подъёма

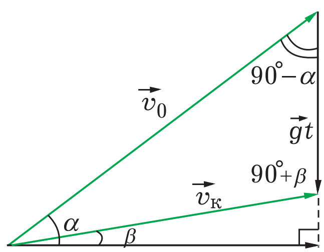
$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g},$$

получаем сразу ответ:

$$H = \frac{(v_0^2 + g^2t^2 - v_к^2)^2}{8g^3t^2}.$$

III. *Ещё одна типичная задача среднего уровня. Под углом α к горизонту брошено тело с начальной скоростью v. Через сколько времени t оно будет двигаться под углом β к горизонту? Чему будет равна при этом скорость? Трение отсутствует.*

Решение. Нарисуем треугольник скоростей для момента времени, когда скорость направлена вверх под углом β к горизонту.



Применим для данного треугольника скоростей теорему синусов:

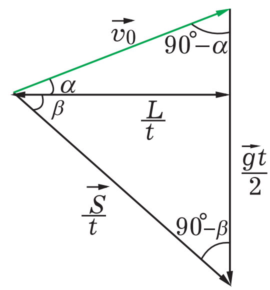
$$\frac{gt}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{v_0}{\sin(90^\circ + \beta)},$$

$$\frac{v_0}{\sin(90^\circ + \beta)} = \frac{v_к}{\sin(90^\circ - \alpha)}.$$

Так как $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$, а $\sin(90^\circ + \beta) = \cos\beta$, следовательно, из первого уравнения сразу находим время: $t_\uparrow = \dfrac{v_0 \sin(\alpha - \beta)}{g\cos\beta}$. Из второго уравнения находим без труда конечную скорость: $v_к = \dfrac{v_0 \cos\alpha}{\cos\beta}$. Чтобы найти вторую пару ответов, соответствующих моменту времени, когда скорость направлена вниз под углом β к горизонту, достаточно просто заменить во всех формулах угол β на угол $-\beta$. Очевидно из симметрии параболы, что скорость при этом не должна поменяться, а время должно увеличиться: $t_\downarrow = \dfrac{v_0 \sin(\alpha + \beta)}{g\cos\beta}$.

IV. *Задачи на бросание со склона или на склон. Камень бросают под углом α к горизонту с вершины горы, склон которой образует угол β с горизонтом. С какой скоростью v_0 нужно бросить камень, чтобы он упал на склон горы на расстоянии S от вершины?*

Решение. Нарисуем треугольник скоростей в момент падения камня на склон и дважды посчитаем его площадь:



$$S_\Delta = \frac{1}{4}Lg,$$

$$S_\Delta = \frac{1}{2}v_0^2 \frac{\sin(\alpha + \beta)\sin(90^\circ - \alpha)}{\sin(90^\circ - \beta)}.$$

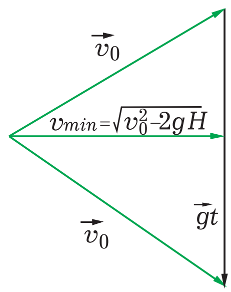
Подставляя в верхнее уравнение очевидную геометрическую связь, $L = S\cos\beta$, приравниваем уравнения друг другу и, сразу после простейших упрощений, получаем ответ:

$$v_0 = \sqrt{\frac{Sg}{2\sin(\alpha + \beta)\cos\alpha}}\cos\beta.$$

V. *Камень бросают с уровня земли, он должен попасть в цель, нарисованную на поверхно-*

сти земли на расстоянии L от точки броска. При этом полет не должен продолжаться более T_{max} секунд, а высота подъёма не должна превышать H_{max} метров. С какой минимальной скоростью v_0 нужно бросать? Земля в тех местах плоская, воздуха на ней нет.

Решение. Нарисуем треугольник скоростей в момент попадания камня в цель.



Минимальная скорость в процессе движения достигается на максимальной высоте подъёма, что становится совсем очевидным, если вспомнить формулу

$$v_{min}=\sqrt{v_0^2-2gH},$$

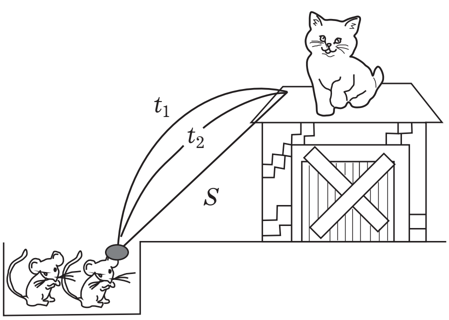
причём эта минимальная скорость является в треугольнике скоростей высотой, проведённой к основанию $\vec{g}t$, следовательно, вертикальный катет верхнего прямоугольного треугольника по теореме Пифагора равен $\sqrt{2gH}$. Если убрать все ограничения, то минимальная скорость при заданной площади верхнего прямоугольного треугольника $S=\frac{1}{4}Lg$ (**замечание 5**) достигалась бы в случае равнобедренного треугольника (**теорема 3**), и каждый катет равнялся бы $\sqrt{\frac{gL}{2}}$. Теперь осталось найти наименьшее значение трёх выражений

$$M=Min\left\{\sqrt{2gH_{max}};\sqrt{\frac{gL}{2}};\frac{gT_{max}}{2}\right\},$$

дважды посчитать площадь треугольника скоростей $S_\Delta=\frac{1}{2}Lg$ и $S_\Delta=M\sqrt{v_0^2-M^2}$, а также приравнять и выразить начальную скорость

$$v_0=\sqrt{\left(\frac{Lg}{2M}\right)^2+M^2}.$$

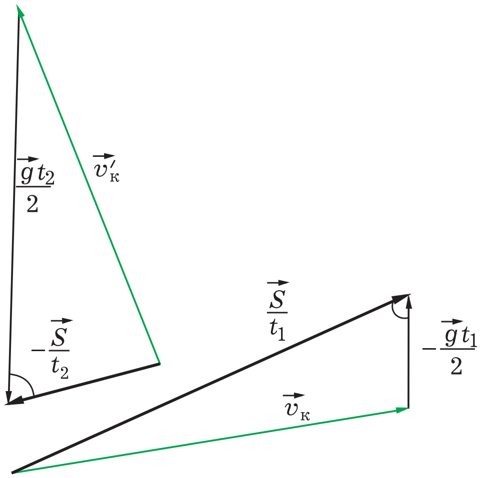
Олимпиадные или просто сложные задачи на движение под углом к горизонту в однородном поле силы тяжести



VI. *Кот Леопольд стоял у края крыши сарая. Два озорных мышонка выстрелили в него камнем из рогатки. Однако камень, описав дугу, через t_1 упруго отразился от наклонного ската крыши сарая у самых лап кота и через t_2 попал в лапу стрелявшего мышонка. На каком расстоянии S от мышей находился кот Леопольд?*

Решение. Камень упруго отразился, следовательно, конечная скорость первого участка равна начальной скорости для второго участка $\left|\vec{v}'_к\right|=\left|\vec{v}_к\right|$.

Зарисуем векторно этот факт, используя **замечание 3,** говорящее о



том, что наряду с уравнением $\frac{\vec{S}}{t} = \vec{v}_0 + \frac{\vec{g}t}{2}$ можно пользоваться также векторным равенством

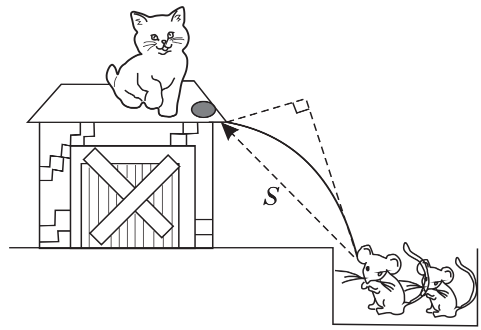
$$\frac{\vec{S}}{t} = \vec{v}_к - \frac{\vec{g}t}{2}.$$

Так как дальности полёта на первом и на втором участке равны, значит, по **замечанию 5**, равны и площади каждого треугольника $S_\Delta = \frac{1}{4}Lg$, следовательно, имеем два равновеликих треугольника с равными углами $\angle(\vec{S}, \vec{g})$ и равными противолежащими сторонами $|\vec{v}'_к| = |\vec{v}_к|$, а это означает, что по **теореме 1** два треугольника равны, а значит, равны и их стороны:

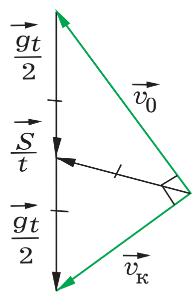
$$\frac{gt_1}{2} = \frac{S}{t_2}.$$

Ответ: $S = \frac{gt_1t_2}{2}$.

VII. *Кот Леопольд сидел у края крыши. Два озорных мышонка выстрелили в него камнем из рогатки. Камень, описав дугу, упал у ног кота через время $t = 1$с. На каком расстоянии S от мышей находится кот Леопольд, если векторы скоростей камня в момент выстрела и в момент падения были взаимно перпендикулярны?*



Решение. Нарисуем диаграмму скоростей, соответствующую условию задачи.



Средняя скорость, равная отношению перемещения ко времени $\langle\vec{v}\rangle = \frac{\vec{S}}{t}$, является медианой, в данном случае проведённой из вершины прямого угла, следовательно, равна половине гипотенузы:

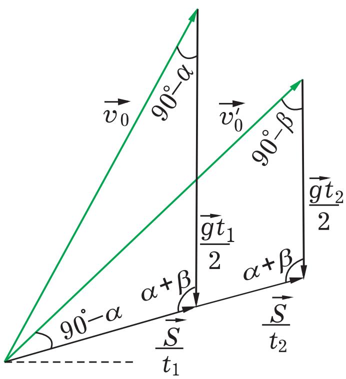
$$\frac{S}{t} = \frac{gt}{2}.$$

Сразу получаем ответ: $S = \frac{gt^2}{2}$.

VIII. *Из пушки выпустили последовательно два снаряда со скоростью v_0 первый – под углом α к горизонту, второй под углом β (азимут один и тот же). Найти интервал времени между выстрелами, при кото-*

ром снаряды столкнутся друг с другом.

Решение. Нарисуем два треугольника скоростей, совмещённых в одной точке для момента столкновения. Так как дальность полёта в момент столкновения одна и та же, то у этих треугольников, по **замечанию 5**, одинаковая площадь, а также одинаковые углы $\angle\left(\frac{\vec{S}}{t}, \frac{\vec{g}t}{2}\right)$ и, по условию задачи, одинаковые стороны $v_0 = v_0'$.



Исходя из **теоремы 1**, эти два треугольника равны, следовательно, равны и соответствующие углы.

Применим теперь теорему синусов для этих двух треугольников:

$$\frac{\frac{1}{2}gt_1}{\sin(90^\circ-\beta)} = \frac{v_0}{\sin(\alpha+\beta)} \quad \text{и}$$

$$\frac{\frac{1}{2}gt_2}{\sin(90^\circ-\alpha)} = \frac{v_0}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Выражаем из этих уравнений t_1 и t_2, вычитаем друг из друга, и сразу получаем ответ:

$$\Delta t = \frac{2v_0\,|\cos\alpha - \cos\beta|}{g\sin(\alpha+\beta)}.$$

IX. *Из отверстия шланга, прикрытого пальцем, бьют две струи под углом α и β к горизонту с одинаковой начальной скоростью v_0. На каком расстоянии по горизонтали струи пересекутся?*

Решение. Нетрудно заметить, что данная задача и предыдущая полностью аналогичны, за исключением, собственно говоря, конечного вопроса. А ответить на вопрос задачи очень легко, нужно просто посчитать площадь одного из двух одинаковых треугольников

$$S_\Delta = \frac{1}{2}v_0^2\frac{\sin(90^\circ-\alpha)\sin(90^\circ-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} =$$

$$= \frac{1}{2}v_0^2\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{v_0^2}{2(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)}$$

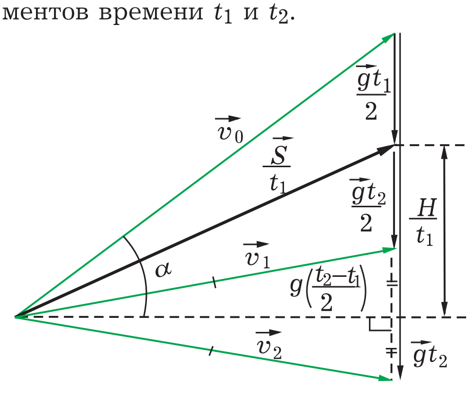
и учесть, что эта площадь также равна, по **замечанию 5**, $S_\Delta = \frac{1}{4}Lg$.

Сразу получаем ответ:

$$L = \frac{v_0^{\,2}}{g}\frac{2}{(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)}.$$

X. *Тело, брошенное под углом α к горизонту, дважды находилось на одной и той же высоте – в моменты времени t_1 и t_2. Определите эту высоту H и начальную скорость тела v_0.*

Решение. Раз фиксирована высота H, значит, фиксирована и скорость тела на данной высоте: $v_1 = v_2 = \sqrt{v_0^2 - 2gH}$. Нарисуем единую диаграмму скоростей для моментов времени t_1 и t_2.



Заметим, что треугольник, образованный скоростями v_1 и v_2, равнобедренный с основанием $g(t_1 - t_2)$, из чего сразу следует два геометрических очевидных соотношения:

$$\frac{H}{t_1} = g\left(\frac{t_2 - t_1}{2}\right) + \frac{gt_1}{2},$$

$$v_0 \sin\alpha = g\left(\frac{t_2 - t_1}{2}\right) + gt_1,$$

из которых сразу следуют ответы:

$$H = \frac{gt_2 t_1}{2},\ v_0 = \frac{g(t_2 + t_1)}{2\sin\alpha}.$$

XI. *Тело брошено с высоты H под углом α к горизонтальной плоскости. К поверхности земли оно подлетает под углом β. Какое расстояние по горизонтали пролетит тело?*

Решение. Нарисуем диаграмму скоростей, соответствующую задаче.

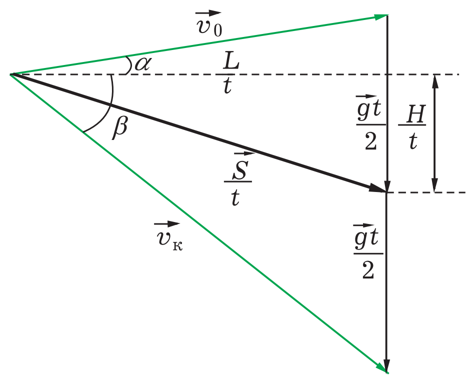
Из рисунка видно, что:

$$\frac{H}{t} = \frac{L}{t}\operatorname{tg}\beta - \frac{gt}{2},$$

$$\frac{H}{t} = \frac{gt}{2} - \frac{L}{t}\operatorname{tg}\alpha.$$

Сложив эти два уравнения и умножив на t, моментально находим ответ:

$$L = \frac{2H}{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}.$$



Задачи на экстремальность полётов

XII. *Из окна комнаты, расположенной на высоте H, бросают камень с начальной скоростью v_0. Под каким углом α к горизонту следует бросить камень, чтобы он улетел как можно дальше от окна? На какое максимальное расстояние L_{max} от окна по горизонтали он удалится?*

Решение. Так как нам известны высота и модуль начальной скорости, то однозначно задан модуль конечной скорости:

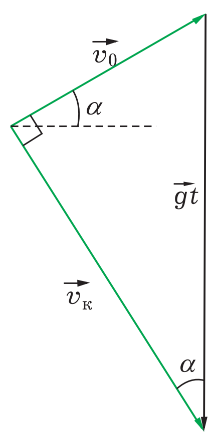
$$v_к^2 = v_0^2 + 2gH.$$

Площадь треугольника скоростей, по **замечанию 5**, равна

$$S_\Delta = \frac{1}{2}Lg,$$

а с другой стороны, её можно посчитать как половину произведения скоростей на угол между ними:

$$S_\Delta = \frac{1}{2}v_к v_0 \sin\vartheta = \frac{1}{2}Lg.$$



Так как скорости камня фиксированы, единственное, что влияет на площадь, это синус угла между скоростями. Очевидно, что максимальная дальность полёта достигается при максимальности синуса, т. е.

перпендикулярности заданных скоростей:

$$\frac{1}{2}v_к v_0 \sin 90^\circ = \frac{1}{2}L_{max}g.$$

Сразу получаем ответы на два поставленных вопроса.

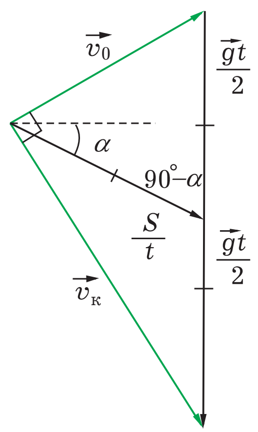
Максимальная дальность полёта

$$L_{max} = \frac{v_0\sqrt{v_0^2 + 2gH}}{g},$$

угол бросания: $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gH}}$.

XIII. *Склон горы составляет угол α с горизонтом. На какое максимальное расстояние вниз вдоль склона можно забросить камень, если его начальная скорость равна v_0? Под каким углом нужно бросать камень? Сколько времени будет длиться полёт камня?*

Решение. В этой задаче задано направление перемещения, следовательно, задан угол между перемещением и ускорением свободного падения $(90^\circ - \alpha)$, а также противолежащая сторона к нему v_0.



Так как площадь данного верхнего треугольника однозначно определяется дальностью полёта $S_\Delta = \dfrac{1}{4}Lg$, то максимальное расстояние полёта соответствует максимальной площади этого треугольника. А по **теореме 2**, если задан в треугольнике угол и противолежащая сторона к нему, то максимальная площадь достигается в случае равнобедренного треугольника. Поэтому угол бросания легко определить, если учесть, что углы при основании равнобедренного треугольника равны и сумма углов в треугольнике равна 180 градусов: углы при основании

$$\frac{180^\circ - (90^\circ - \alpha)}{2} = 45 + \frac{\alpha}{2},$$

следовательно, угол бросания $\left(45^\circ + \dfrac{\alpha}{2}\right) - \alpha = 45^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$. Известно, что если медиана в треугольнике равна половине стороны, к которой она проведена, то этот треугольник прямоугольный. Поэтому гипотенуза, с одной стороны, равна $c = 2\dfrac{S}{t}$, а с другой стороны, равна $c = gt$. Перемножая эти два уравнения, находим квадрат гипотенузы: $c^2 = 2Sg.$. Также квадрат гипотенузы можно найти, применяя теорему Пифагора:

$$c^2 = v_0^2 + v_к^2 = v_0^2 + \left(v_0^2 + 2gH\right) =$$

$$= v_0^2 + \left(v_0^2 + 2gS\sin\alpha\right) = 2Sg.$$

Из последнего уравнения выражаем перемещение: $S = \dfrac{v_0^2}{g(1-\sin\alpha)}$. Для того чтобы найти время полёта, надо ещё раз учесть, что медиана в прямоугольном треугольнике, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы:

$$\frac{S}{t} = \frac{gt}{2}.$$

Следовательно,

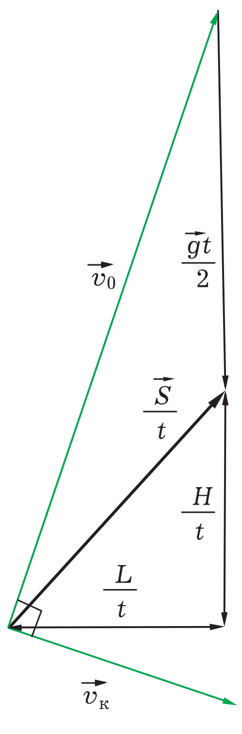
$$t = \sqrt{\frac{2S}{g}} = \frac{v_0}{g}\sqrt{\frac{2}{1-\sin\alpha}}.$$

Ответы: $S_{max} = \dfrac{v_0^2}{g(1-\sin\alpha)}$,

угол бросания равен $45^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$,

$$t = \frac{v_0}{g}\sqrt{\frac{2}{1-\sin\alpha}}.$$

XIV. *Какова минимальная скорость снаряда, при которой возможно поразить цель, находившуюся на расстоянии L на высоте H? Под каким углом при этом нужно стрелять?*



Решение. Как и в предыдущей задаче, задано направление перемещения, следовательно, задан угол между перемещением и ускорением свободного падения, а также задана площадь верхнего треугольника $S_\Delta = \dfrac{1}{4}Lg$, и по **теореме 3** минимально возможная противолежащая сторона достигается в случае равнобедренного треугольника, т. е. $\dfrac{S}{t} = \dfrac{gt}{2}$. Из чего следует, что квадрат времени полёта равен $t^2 = \dfrac{2S}{g}$.

Запишем теорему Пифагора для прямоугольного треугольника с гипотенузой v_0:

$$v_0^2 = \left(\frac{L}{t}\right)^2 + \left(\frac{H}{t}+\frac{gt}{2}\right)^2 = \left(\frac{L}{t}\right)^2 + \left(\frac{H}{t}+\frac{S}{t}\right)^2 = \frac{L^2+H^2+2HS+S^2}{t^2}.$$

Учтём, что $L^2 + H^2 = S^2$ и подставим квадрат времени полёта:

$$v_0^2 = \frac{S^2+2SH+S^2}{\dfrac{2S}{g}} = \frac{2S(S+H)g}{2S} = (S+H)g.$$

Найдём тангенс угла бросания. Так как $\dfrac{gt}{2} = \dfrac{S}{t}$, следовательно,

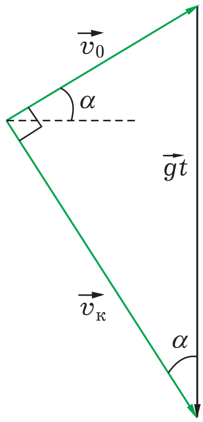
$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\dfrac{S}{t}+\dfrac{H}{t}}{\dfrac{L}{t}} = \frac{S+H}{L}.$$

Ответ: $v_0 = \sqrt{\left(\sqrt{L^2+H^2}+H\right)g}$,

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sqrt{L^2+H^2}+H}{L}.$$

XV. *Лампочка висит на расстоянии h от потолка и на высоте H от пола. При её разрыве осколки разлетаются во все стороны с одной и той же скоростью v_0. Найти радиус R круга на полу, в который попадут осколки. Считать, что удары осколков о потолок абсолютно упругие, а об пол – неупругие. До стен осколки не долетают.*

Решение. Очевидно, что в окружность круга радиуса R упадут осколки, имеющие максимально возможную дальность полёта, поэтому и задача сводится к нахождению этой дальности. Для начала представим, что потолок находится настолько высоко, что осколки, улетающие максимально далеко, его не задевают.



Известен модуль начальной скорости и известна высота бросания, следовательно, **по замечанию 4,** задана и конечная скорость осколков $v_к = \sqrt{v_0^2 + 2gH}$. Площадь треугольника скоростей, образованная начальной скоростью $\vec{v}_0$, конечной скоростью $\vec{v}_к$ и вектором $\vec{g}t$, равна, по **замечанию 5,** $S_\Delta = \frac{1}{2}Lg$. Так как две стороны этого треугольника заданы, то максимальная площадь, а следовательно, и максимальная дальность полёта достигается в случае перпендикулярности начальной и конечной скоростей:

$$S_\Delta = \frac{1}{2}v_к v_0 \sin 90^\circ = \frac{1}{2}L_{max}g,$$

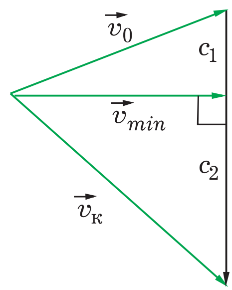
или $L_{max} = \frac{v_к v_0}{g}$. Минимальная высота потолка, при которой справедлив данный ответ, определяется максимальной высотой подъёма этого максимально далеко летящего осколка: $h_{кр} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$. Синус угла в прямоугольном треугольнике определяется как

$$\sin\alpha = \frac{v_0}{gt} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + v_к^2}} = \frac{v_0}{\sqrt{2\left(v_0^2 + gH\right)}}.$$

Следовательно, критическая высота потолка, выше которой потолок не влияет на максимальную дальность полёта осколков, равна

$$h_{кр} = \frac{v_0^4}{4g(v_0^2 + gH)}.$$

Если же высота потолка ниже $h_{кр}$, то достаточно очевидно, что максимально далеко улетает тот осколок, траектория которого почти касается потолка, ведь именно такой осколок имеет максимальное время полёта. А раз известна максимальная высота подъёма этого осколка, равная h, то и известна его горизонтальная скорость на этой высоте: $v_{min} = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$. Нарисуем диаграмму скоростей, соответствующую осколку, касающемуся потолка.



Для того, чтобы посчитать площадь этого треугольника скоростей, найдём основание, к которому проведена высота v_{min}. Это основание, как легко видеть на рисунке, состоит из двух катетов c_1 и c_2:

$$c_1 = \sqrt{v_0^2 - (v_0^2 - 2gh)} = \sqrt{2gh} \quad \text{и}$$

$$c_2 = \sqrt{\left(v_0^2 + 2gH\right) - \left(v_0^2 - 2gh\right)} = \\ = \sqrt{2g\left(h + H\right)}.$$

Теперь не представляет труда дважды посчитать одну и ту же площадь: один раз как половину основания на высоту, а второй раз по **замечанию 5**:

$$S_\Delta = \frac{1}{2} v_{min}(c_1 + c_2) = \frac{1}{2} Lg,$$

и сразу получить максимальную дальность полёта осколка, касающегося в верхней точке траектории потолка:

$$L = \frac{\sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}\left(\sqrt{2gh} + \sqrt{2g\left(h + H\right)}\right).$$

Ответ:

$$\begin{cases} R = \dfrac{\sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}\left(\sqrt{2gh} + \sqrt{2g\left(h + H\right)}\right) \\ \qquad \text{при } h < \dfrac{v_0^4}{4g\left(v_0^2 + gH\right)}, \\ R = \dfrac{v_0\sqrt{v_0^2 + 2gH}}{g} \\ \qquad \text{при } h > \dfrac{v_0^4}{4g\left(v_0^2 + gH\right)}. \end{cases}$$

В заключение хотелось бы отметить, что кинематика – не единственный раздел физики, где используются векторные уравнения, и данная статья является началом разговора о преимуществах векторно-геометрического подхода к решению физических задач. Учащиеся должны чётко усвоить важность того факта, что ряд физических величин и закономерностей, их включающих, имеет векторный характер. А лучший способ это усвоить – сделать чертёж, соответствующий написанному векторному уравнению. А дальше остаётся только внимательно посмотреть на полученный рисунок и проанализировать его.

В данной статье важное место занимает наблюдение, сделанное в результате этого анализа для одного частного случая механического движения: движения в поле постоянной силы. Это рассмотренный в замечании 5 факт, что площадь треугольника скоростей, составленного из начальной скорости v_0, средней скорости $\langle\vec{v}\rangle$ и вектора $0{,}5\vec{g}t$, равна $S_\Delta = \frac{1}{4}Lg$. Именно эта находка позволяет существенно разнообразить математические приёмы решения задач, что и было продемонстрировано выше.

В настоящее время общепринятым является координатный метод решения векторных уравнений во всех разделах физики. Более того, геометрические методы решения таких задач практически исчезли из методической копилки учителей, в то время как многие задачи геометрически решаются достаточно быстро, наглядно, изящно. Необходимо также подчеркнуть важность для учащихся умения решать задачи различными способами, так как именно эти умения способствуют развитию их творческого потенциала.

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Из курсовой работы

Электронная часть предлагаемого мной аппарата изолирована от внешних электромагнитных помех металлическим кожухом-коробкой из-под печенья. Благодаря этому усовершенствованию аппарат не только отлично работает, но и аппетитно выглядит.